

Cardinais Transfinitos

A “Possança” ou o número de elementos de um conjunto infinito

Ernesto von Rückert

(Trabalho apresentado em 1968, como parte das exigências para aprovação na disciplina “Fundamentos da Matemática” do primeiro ano do Curso de Matemática da Universidade Presidente Antônio Carlos em Barbacena, Minas)

Não é minha pretensão escrever um tratado sobre a possança dos conjuntos que esgote completamente o assunto. Quero simplesmente fazer alguns comentários da matéria colhida aqui e acolá, um pouquinho em cada livro, que estejam ao alcance do leigo, sem tampouco faltar ao rigor matemático que o assunto exige.

À medida que se desenvolve o raciocínio da criança, ela vai observando os seres e fenômenos da natureza e tirando as suas conclusões. Uma das coisas mais importantes que ela passa a compreender é a manifestação da unidade, da variedade e da pluralidade. Ao contemplar uma ninhada de gatinhos, por exemplo, a criança começa a perceber que, além de ser cada gatinho um ente individual, há um certo “quê” que é o comum a todos, isto é, o fato de serem gatos de uma mesma ninhada. Em geral, sempre que ela percebe um grupo de indivíduos ou coisas, que possuem alguma propriedade comum, ela os agrupa em um conjunto e lhes associa a sua propriedade comum. Por exemplo, conjunto de pessoas da sua família, conjunto de móveis do seu quarto e assim por diante.

Evento semelhante ocorreu com a espécie humana, fazendo a analogia entre sua evolução e a da criança. A idéia de conjunto e de elemento foi sendo gravada cada vez mais caracterizadamente na inteligência dos povos pré-históricos.

Mais tarde, com a complexidade crescente das atividades do homem, outra noção matemática foi surgindo em sua mente. O bicho-homem que era nômade fixou-se e, de caçador, passou às atividades gregárias da agricultura e da pecuária. Nesta última, necessário se fazia manter um rígido controle sobre o gado, para estar a par das atividades dos animais e, mesmo, dos homens predadores. Assim sendo, ao soltar as reses pela manhã, ele associava a cada cabeça uma pedrinha e a colocava em uma sacola. À noite, ao recolhê-las, fazia nova associação e assim podia verificar se estavam intactas. Observemos que a cada animal correspondia uma pedrinha e cada pedrinha associava-se a um único animal. Esta correspondência é chamada correspondência bi-unívoca ou correspondência um-a-um nos dois sentidos.

A observação e a experiência cotidiana nos dizem que é muito fácil estabelecer esta correspondência: a cada pessoa corresponde o seu nome — raramente haverá numa coletividade duas pessoas com o mesmo nome, cada botão corresponde à sua casa, cada residência ao seu endereço etc. Estamos tão acostumados a isto que não percebemos que quando chamamos João quem nos atende não é a palavra João e sim a pessoa correspondente.

Se os elementos de dois conjuntos podem ser postos em correspondência bi-unívoca, os conjuntos denominam-se equivalentes. Desta maneira são equivalentes as reses e as pedrinhas do embornal do nosso homem pré-histórico. Agora observemos: Posso tomar um conjunto de livros e correspondê-lo bi-univocamente a um conjunto de bananas, associar a cada banana uma pessoa diferente, a cada pessoa uma estrela e assim sucessivamente, associar bi-univocamente os livros com qualquer conjunto definido por qualquer espécie de elementos. No entanto, apesar da diversidade dos conjuntos, uma coisa mantém-se constante e é propriedade comum a todos esses conjuntos. Tal coisa é o número de elementos do conjunto. Para definirmos mais precisamente o que seja este número, vamos partir de umas considerações básicas e elementares.

Certos conjuntos podem ser dispostos de tal maneira que seus elementos possuam uma certa ordem, isto é, de tal maneira que eu possa dizer se um elemento é anterior ou posterior a outro. Por exemplo: o conjunto de andares de um prédio. Quando houver dois elementos “a” e “b” desse tal conjunto, “a” anterior a “b”, para os quais não exista elemento posterior a “a” nem anterior a “b”, este conjunto é chamado discreto e o elemento “b” é o seguinte de “a”, sendo “a” o antecedente de “b”. Pode haver um conjunto discreto e ordenado em que exista um dado elemento especial, nomeado “primeiro elemento”, que não possua antecedente ou que não seja seguinte de nenhum outro elemento do conjunto considerado — análogamente poderá haver um “último elemento”. Vejamos um conjunto muito importante em matemática, no qual esses conceitos que vimos se realizam.

Chamemos este conjunto de “Conjunto dos Números Naturais”, representando-o por \mathcal{N} e vamos defini-lo:

Seja “zero” — simbolizado por “0” — o primeiro dos elementos de \mathcal{N} .

\mathcal{N} é de tal maneira que, qualquer que seja um elemento de \mathcal{N} que consideremos, haverá, em \mathcal{N} , um seguinte para este elemento.

Cada elemento só possui um seguinte e cada elemento, com exceção do zero, é seguinte de um único elemento, dentro do conjunto \mathcal{N} .

Se houver alguma propriedade de que goze o primeiro elemento de \mathcal{N} e, se o fato de um certo elemento qualquer de \mathcal{N} gozar dessa propriedade acarretar que o elemento seguinte também goze, então todos os elementos de \mathcal{N} gozam dessa propriedade.

Analisemos os itens da definição, ao mesmo tempo em que procuramos dar uma noção intuitiva de número natural.

Há certos conjuntos que não possuem elementos. Por exemplo, o conjunto dos brasileiros de origem lusa, nascidos no século XII. Ora, como sabemos, os portugueses chegaram à nossa pátria no ano de 1500, sendo impossível que houvesse brasileiros descendentes de portugueses antes dessa data no Brasil. Este é, então, um tipo de conjunto vazio, melhor dizendo, “O”, conjunto vazio, pois que é único, já que um conjunto é definido por seus elementos e não existem diferentes tipos de ausência de elementos. Portanto, ele só pode estar correspondendo bi-univocamente consigo mesmo, se pudéssemos dizer que “a cada nenhum elemento corresponde elemento algum”. Logo, se quiséssemos comparar esse conjunto com algum conjunto padrão, por exemplo, as pedrinhas do embornal, teríamos que colocar nenhuma pedrinha. Ou, em outras palavras: colocar “zero” pedrinhas no embornal. Este “zero”, abstração feita da quantidade de elementos de um conjunto vazio, é o primeiro elemento dos números naturais. O conceito de unidade é também intuitivo. Chamaremos unidade a cada elemento individualmente. Ele é “um” elemento do conjunto. O conjunto que possui menor número de elementos é aquele que tem “um” elemento. Esse “um” é o seguinte do zero nos números naturais. E assim por diante. Colocamos vários conjuntos equivalentes e associamos um-a-um seus elementos com a sucessão dos números naturais a partir do um. Procedemos assim a uma “contagem” dos elementos do conjunto. Se o conjunto possuir um último elemento — supusemos tacitamente que ele possui o primeiro elemento, então o número natural que estiver em correspondência com esse elemento é o número de elementos do conjunto, ou melhor, é o número cardinal do conjunto. Zero é o número cardinal do conjunto vazio. O número natural chamado “dez” é o número cardinal do conjunto dos dedos das mãos; o número natural chamado “sete” é o número cardinal do conjunto dos dias da semana.

É interessante notar que o número natural existe independentemente do nome que se dá a ele ou do símbolo que a ele se associa. Porém, como foi dito antes, já estamos tão habituados à correspondência um-a-um, que invocamos um número natural pelo seu numeral — isto é, os sinais gráficos e fonéticos com que o designamos — sem que isto cause a mínima perturbação.

Voltando então ao número cardinal, é simples concluir que qualquer conjunto finito possui para cardinal um número natural. Mesmo o conjunto de

grãos de areia das praias ou o conjunto de estrelas do Universo, ou o conjunto de moléculas de água do oceano pode ser colocado em equivalência com uma parte dos números naturais que vai do “um” até o número cardinal do conjunto. Isto é, estes conjuntos são finitos. Que seria um conjunto finito?

Em primeiro lugar, um conjunto finito é discreto. Em segundo lugar, possui primeiro e último elementos. O conjunto de instantes do tempo entre dois instantes dados, apesar de possuir primeiro e último elementos, não é finito, pois não é discreto, isto é, é denso ou, em outras palavras: entre dois instantes quaisquer existe pelo menos um instante intermediário. Esse intervalo de tempo não pode ser colocado em equivalência com uma parte dos números naturais que possua um último elemento para ser seu cardinal.

O quarto item da definição de número natural é chamado “Princípio da Indução Completa”. A sua importância é diretamente proporcional à sua incompreensão por parte de muita gente. Posso provar que certo vagão qualquer de um trem vai parar quando o semáforo estiver fechado sem sequer mencioná-lo. Basta que eu prove que o primeiro vagão, isto é, a locomotiva irá parar no sinal e que se um vagão parar, o seguinte também pára. Com efeito, parando a máquina, o segundo vagão pára. Parando este, o terceiro pára, o que faz o quarto parar e assim por diante, todos os carros pararão. Logicamente o carro considerado também para.

Isto é usado para facilitar muitas demonstrações em matemática.

Já que falamos em número cardinal, equivalência e número natural, podemos atacar os seguintes problemas: Que conjuntos são equivalentes ao conjunto \mathcal{N} ? Qual é o número cardinal do conjunto \mathcal{N} ? Podemos colocar \mathcal{N} em correspondência consigo mesmo e verificamos qual é o último elemento. Só que \mathcal{N} não possui último elemento, pois qualquer que seja o número natural, existe um número seguinte, o que implicaria na existência de um seguinte ao último elemento que deixaria de ser o último. Isto é, \mathcal{N} é um conjunto “infinito”. Não existe um número natural que seja cardinal de \mathcal{N} .

O conceito de infinito é muito sutil e presta-se a uma análise detalhada.

Infinito é uma coisa que não existe na natureza. É uma simples abstração da mente humana. Na natureza tudo é finito, mesmo que seja incomensuravelmente, indefinidamente, “infinitamente” grande. O telescópio de Monte Palomar alcança dois bilhões de anos luz; poucos, ou talvez nenhum homem é capaz de compreender e visualizar esse número que no entanto pode ser escrito no nosso sistema de numeração decimal, em menos de seis centímetros: 2.000.000.000. Este número é maior que o número de quilômetros quadrados da superfície da Terra, maior do que o número de quilômetros que nos separam

do Sol, maior do que o número de metros que nos separam da Lua, e mesmo assim é um número bem pequeno. Se quiséssemos saber aquela distância em angstrons — medida usada para medir átomos — teríamos 50 decilhões de angstrons ou 5 com 34 zeros depois. O número de átomos do Universo foi calculado em 1 com 72 zeros depois. E observemos que cada zero acrescentado multiplica o número por dez. Existe um número chamado googol, que é 1 com 100 zeros depois. É maior do que o número de átomos do Universo. O googolplex é 1 com 1 googol de zeros depois. Porém, ainda é um número finito e pode haver — teoricamente — conjuntos finitos que possuam esse número para cardinal.

Daí podemos inferir que o infinito, idealizado pela razão humana, é de tal maneira grande que é inconcebível por essa mesma razão. Disse de tal maneira grande, mas esta expressão não pode ser aplicada ao infinito, pois ele é maior do que qualquer coisa ou número imaginável. Contudo, o homem ousou contar os elementos de um conjunto infinito; propôs um número cardinal para os números naturais.

Foi o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), nascido na Rússia, que, em fins do século XIX, idealizou uma classe de números para serem cardinais dos conjuntos infinitos. Como os números cardinais que conhecemos são finitos, são números naturais, outro nome deve ser dado ao número de elementos dos conjuntos infinitos. Eles são chamados “números cardinais transfinitos” e representam a “possança” ou “potência” dos conjuntos infinitos, que é equivalente ao número de elementos dos conjuntos finitos. Sendo o conjunto infinito, não posso dizer quantos elementos ele tem, mas posso dizer qual a “possança” que ele possui. Como definimos número cardinal como a abstração feita da propriedade comum de todos os conjuntos finitos que estão em correspondência bi-unívoca, assim definimos possança à propriedade comum de todos os conjuntos infinitos que sejam equivalentes.

Ora, dirá o leitor, assim como o vazio é único, também o infinito, qualquer que seja, é o mesmo. Não se pode dizer que certo conjunto infinito tem mais elementos que o outro: os dois possuem “infinitos elementos”! Com o desenvolver deste trabalho poderemos comprovar a falsidade desta afirmação.

Cantor designou os números cardinais transfinitos pela letra \aleph — “alef”, primeira letra do alfabeto hebraico. A sucessão dos “alefs” é indicada por índices naturais $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3$, de tal modo que o conjunto dos números transfinitos possa ser colocado em correspondência com os números naturais.

O primeiro conjunto infinito que se nos apresenta é o conjunto dos números naturais. A ele e a todos os conjuntos que lhe são equivalentes atribu-

irmos o cardinal transfinito \aleph_0 , ou dizemos que a sua possança é \aleph_0 . — Lembrando que \aleph_0 é um número infinito e portanto sem possibilidade de comparação com qualquer número natural. Outro conjunto de possança \aleph_0 é o conjunto dos números pares ou ímpares positivos. $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \dots$ é a sucessão dos números pares. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ é a sucessão dos números naturais. Aparentemente, o número cardinal dos pares é metade do número cardinal dos naturais,

isto é, $\frac{\aleph_0}{2}$. Provaremos que é o próprio \aleph_0 . Sabemos que dois conjuntos possuem a mesma possança se os seus elementos podem ser postos em correspondência bi-unívoca. Como a cada natural corresponde um par que é o seu dobro e a cada par corresponde um natural que é a sua metade, temos a correspondência:

0 1 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 ...

Logo, os dois conjuntos possuem a mesma possança, isto é: \aleph_0 .

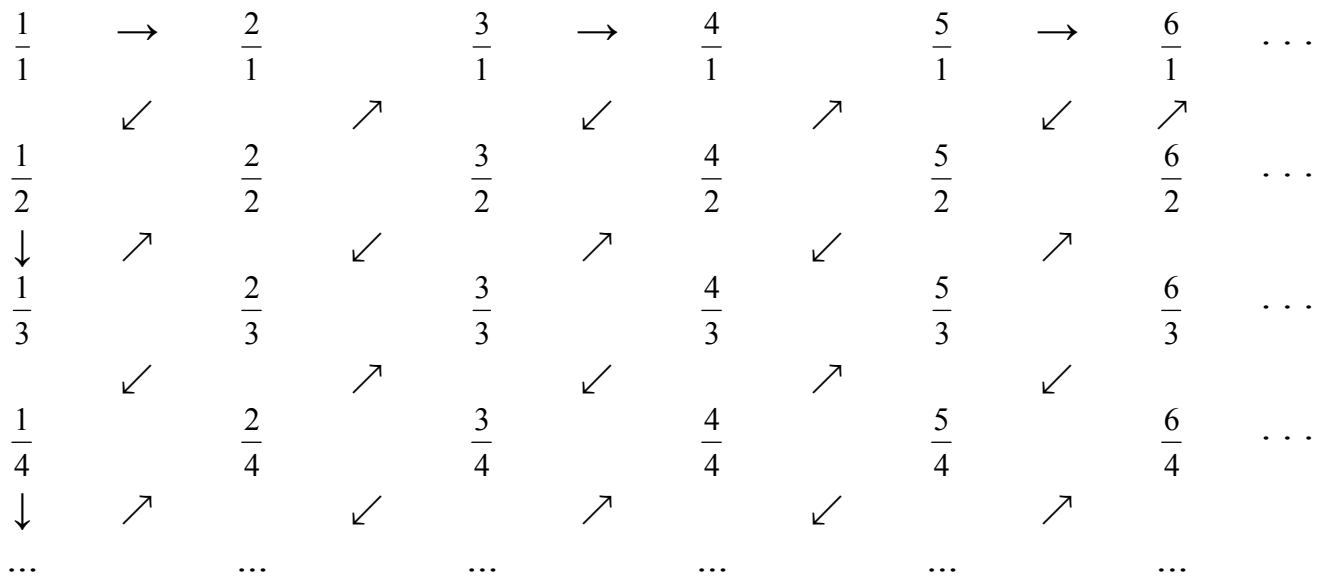
Chamamos de números inteiros relativos, sem muito rigor muito matemático, aos números naturais reunidos com um conjunto que chamaremos de inteiros negativos, que correspondem aos números naturais afetados de uma sinal menos. Isto é:

... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

É fácil verificar a correspondência bi-unívoca entre este conjunto e os números naturais, basta que escrevamos a sucessão iniciada por zero, assim:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5 ...

Outro conjunto numérico que possui a mesma possança dos números naturais é o conjunto dos números racionais. Números racionais são os números de forma $\frac{p}{q}$ onde p e q são números inteiros. Consideremos os racionais positivos onde p e q são números naturais e q não seja zero. Este conjunto é um conjunto denso, pois entre dois números racionais quaisquer existe pelo menos um outro que é a média dos dois. Sendo assim, pareceria impossível estabelecer uma correspondência bi-unívoca com os números naturais, que é um conjunto discreto. De fato esta equivalência é impossível se tomarmos os números racionais em ordem crescente. Porém, é possível arranjá-los segundo um esquema atribuído a Cantor, dispendo-os em uma tabela retangular em que os números p – numeradores – estão ordenados crescentemente da esquerda para a direita e os números q – denominadores – estão ordenados em ordem crescente de cima para baixo.



Podemos proceder a uma contagem desses números, seguindo as setas indicadas no diagrama, percorrendo deste modo todos os números racionais. Observemos que em cada diagonal a soma dos termos p e q é constante. A sucessão dos números racionais pode então ser considerada do ponto de vista da soma dos termos p e q. Dentro de uma mesma classe, a ordenação seria dada pelo numerador, por exemplo. Temos então:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1},$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1} \dots$$

Eliminando todas as frações que possam ser reduzidas a casos anteriores — isto é, numerais diferentes que representam o mesmo número racional, a equivalência com os números naturais fica então perfeitamente determinada, significando que a possança dos números racionais é \aleph_0 .

A título de ilustração podemos citar alguns exemplos de conjuntos equivalentes a \aleph : os conjuntos dos múltiplos dos números naturais, o conjunto dos números primos, o conjunto dos números algébricos, isto é, números que podem ser soluções reais de equações polinomiais de coeficientes racionais.

É interessante notar que o conjunto de todos os grupamentos que podemos fazer com os números naturais, cada grupamento sendo um elemento, ou seja, o conjunto dos subconjuntos dos números naturais, chamado conjunto potência de \aleph , resistiu a todas as peripécias a fim de se estabelecer uma correspondência bi-unívoca com os números naturais. Se, por exemplo, partíssemos do princípio de agrupar os elementos em conjuntos ordenados segundo a soma dos elementos não teríamos como incluir os subconjuntos infinitos dos números naturais. Este fato levou Cantor a propor para o conjunto potência de \aleph a possança de \aleph_1 .

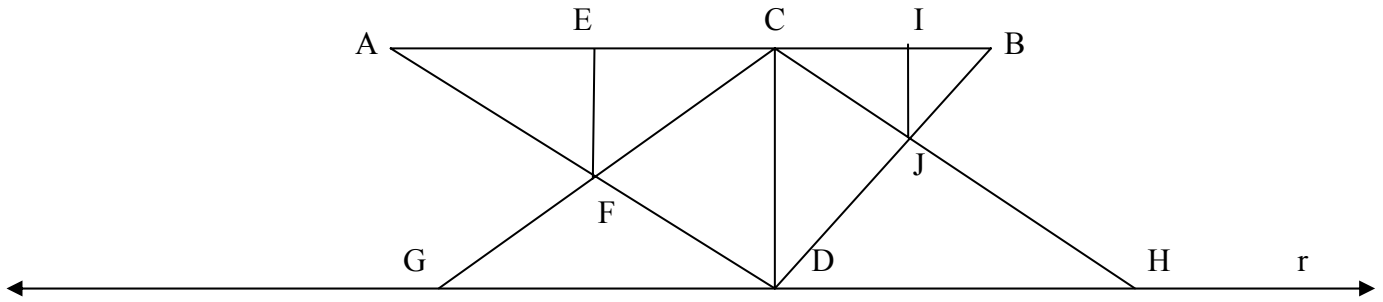
O fato de um conjunto possuir a possança \aleph_1 significa que ele é um conjunto infinito de tal maneira que não pode ser colocado em correspondência bi-unívoca com o conjunto \mathcal{N} . A classe de todos os conjuntos equivalentes ao conjunto potência de \mathcal{N} define o número cardinal \aleph_1 .

Vejamos então quais os conjuntos que possuem a cardinalidade do conjunto potência de \mathcal{N} .

Em matemática podemos distinguir duas espécies de grandezas: enumeráveis e mensuráveis. Enumeráveis são as grandezas referentes a objetos que podem ser colocados em equivalência com \mathcal{N} . Assim, cinco livros, dois homens, duas dúzias de laranjas, são grandezas enumeráveis. Mas se quisermos contar quantas horas temos em um momento, a partir de zero hora, não podemos dar a resposta em termos de número natural. Não existem blocos inteiros e individuais de tempo, ele é contínuo (veja-se, contudo, a quantização do espaço-tempo). Analogamente, ao medirmos uma distância ou uma massa, não temos blocos padrões indivisíveis. Estas são grandezas mensuráveis, sua sucessão é contínua, que é o conceito oposto do descontínuo e do discreto. Chamamos de número real ao número capaz de se identificar com as grandezas contínuas. O conjunto dos números reais é infinito e contínuo, abrangendo o conjunto dos inteiros e racionais relativos além dos números chamados irracionais, isto é, números reais que não são racionais e nem inteiros.

Podemos provar que os números reais não são equivalentes aos números naturais. Antes verifiquemos algumas equivalências preliminares. O conjunto dos números reais pode ser colocado em correspondência bi-unívoca com os pontos de uma reta. Uma reta é um conjunto infinito de pontos, dispostos sem intervalo, isto é, continuamente, prolongando-se indefinidamente nos dois sentidos, com a propriedade indefinível de manter uma direção “reta” constante. A reta não possui espessura, só comprimento, ou seja, é unidimensional. Seus elementos são os pontos, entes abstratos, desprovidos de massa e de volume, com a única propriedade de possuir localização ou posição. Sendo a reta e os números reais contínuos é fácil estabelecer-se uma correspondência bi-unívoca entre os dois conjuntos desde que se fixe um ponto da reta para se associar ao número zero, que se convençione um sentido positivo a partir do zero e que se estabeleça a invariância da distância entre dois pontos, ou seja, que se estabeleça uma escala constante para toda a reta. O número real x atribuído ao ponto P é chamado “coordenada de P ”.

Agora vamos provar que qualquer segmento de reta é equivalente à reta toda. Observemos o desenho:



Vamos estabelecer a correspondência bi-unívoca entre a reta \underline{r} e o segmento \underline{AB} (a reta prolonga-se indefinidamente no sentido das flechas). Pegamos um ponto C qualquer do segmento \underline{AB} e projetemos ortogonalmente (em ângulo reto) C sobre a reta \underline{r} . A projeção é o ponto D . Construimos os segmentos \underline{AD} e \underline{BD} . Qualquer ponto E de \underline{AB} corresponde a um único ponto G de \underline{r} , do seguinte modo: Se E estiver à esquerda de C , como é o caso do desenho, projetemos E sobre \underline{AD} por meio de um segmento paralelo a \underline{CD} , sendo F a projeção. Projetemos então o ponto F sobre a reta \underline{r} por meio de um segmento que passa por C e F , encontrando a reta \underline{r} em G . Reciprocamente, qualquer ponto H de \underline{r} corresponde a um único ponto I de \underline{AB} . Partindo de H , tracemos o segmento \underline{HC} , que intercepta – no caso do desenho – o segmento \underline{BD} em J . Projetemos J sobre \underline{AB} , paralelamente a \underline{CD} , encontrando então o ponto I . Como podemos observar, tanto G quanto I são únicos. Então, se a correspondência é um-a-um nos dois sentidos, ela é bi-unívoca e o segmento \underline{AB} é equivalente à reta \underline{r} , possuindo a mesma possança, isto é, o mesmo número de pontos do que \underline{r} .

Como a reta é equivalente aos números reais, um segmento também é. Como, de acordo com a convenção adotada, um segmento equivale a um intervalo contínuo de números reais – como o segmento possui um tamanho finito: a distância entre seus pontos extremos é finita; ele está correspondendo a um intervalo de números reais para que se mantenha o princípio da invariância da distância, concluímos que o conjunto dos números reais é equivalente a um intervalo de números reais. Desta maneira, se provarmos que um intervalo de números reais não é equivalente ao conjunto \mathcal{N} , estará provado que os números reais não o são.

Consideremos o intervalo que vai de zero até um, inclusive os extremos. Os números reais desse intervalo poderão ser representados por frações decimais infinitas se observarmos, por exemplo, que $0,234$, pode ser considerado como $0,233999\dots$. Vamos supor por hipótese, que os números reais desse intervalo são numeráveis – equivalentes a \mathcal{N} . Temos então, por exemplo:

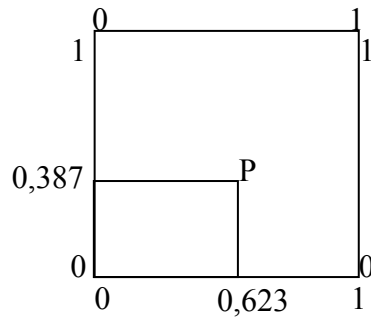
0	0,000000000000000...
1	0,12345980399...
2	0,135790038214...
3	0,54329987712019...
	etc, etc

Vamos construir um número que não esteja nesta série. Em primeiro lugar, ele é diferente de zero. Tomemos a primeira casa decimal desse número diferente da primeira casa decimal do número associado a um e também diferente de zero e nove. Temos assim sete possibilidades para este algarismo – dos dez algarismos, exclui-se o zero, o nove e o um. Tomemos a segunda casa decimal do número diferente da segunda casa decimal do número associado a dois e diferente do zero e do nove, e assim por diante. O número formado será então diferente de todos os números contidos naquela sucessão, porque uma casa decimal qualquer de ordem \underline{n} , por exemplo, será diferente da casa respectiva no número que estiver associado ao número natural \underline{n} . E note-se que, em cada casa decimal há sete possibilidades para o algarismo respectivo.

Conclusão: os números reais do intervalo $(0,1)$ não podem ser equivalentes aos números naturais, e conseqüentemente o conjunto \mathcal{R} dos números reais não é equivalente a \mathcal{N} , não possuindo a possança \aleph_0 .

Surge aí uma hipótese que possui as mesmas características do quinto postulado de Euclides sobre a existência e a unicidade de uma paralela a uma reta dada por um ponto fora dela, isto é, é uma hipótese inteiramente independente da teoria construída sobre os números cardinais transfinitos. É a chamada “*Hipótese do Contínuo*”, atribuída a Cantor, qual seja, “a possança dos números reais é a possança \aleph_1 . Os números reais têm a mesma cardinalidade do conjunto potência de \mathcal{N} .”

Passemos a analisar os conjuntos que possuem a mesma potência ou possança que \mathcal{R} . Em primeiro lugar, por extensão do caso do segmento, qualquer linha contínua possui a possança de \mathcal{R} . Por meio de projeções fica fácil provar isto. Uma coisa que não é tão aceitável é que o plano e mesmo o espaço possuem o mesmo número de pontos que a reta. Provaremos em primeiro lugar que um quadrado possui tantos pontos quanto um de seus lados. Façamos o quadrado com lado igual a um e estabeleçamos em seus lados um sistema de coordenadas reais de zero a um.



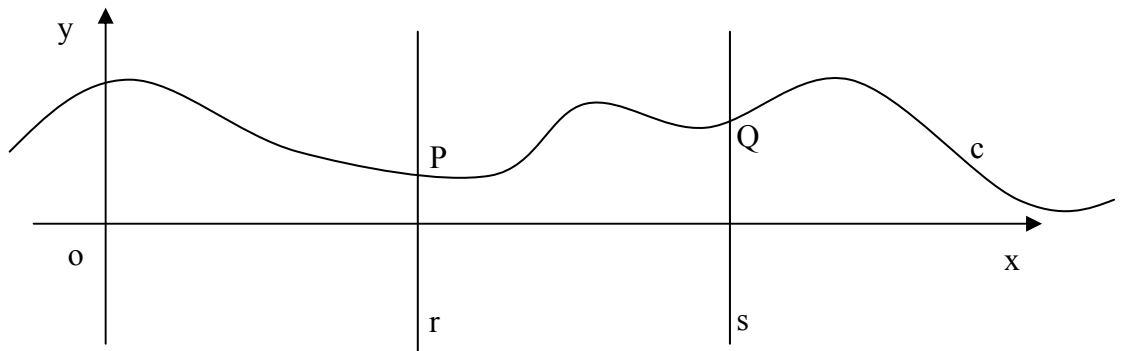
Cada ponto do quadrado pode ser projetado sobre seus lados, sendo assim localizado por um par de coordenadas reais. O ponto P do desenho possui, a propósito, coordenadas $(0,623, 0,387)$ onde $0,623$ é a coordenada referente ao lado horizontal e $0,387$ é a coordenada referente ao lado vertical. Podemos intercalar as casas decimais dos dois números, fazendo assim um único número real $0,632837$. Vice-versa, dado um número real $0,432879$, podemos decompô-lo em $0,427$ e $0,389$ que correspondem a um ponto único do quadrado. Assim podemos corresponder bi-univocamente os pontos de um quadrado (dados por um par de coordenadas) com um único ponto associado no lado do quadrado (com uma única coordenada). De maneira semelhante qualquer ponto do plano corresponde a uma única coordenada real e portanto sua possança é \aleph_1 . A demonstração para o espaço simplesmente exigiria que agrupássemos as casas decimais de três em três porque o espaço possui três dimensões. Se imaginássemos um espaço com um número n de dimensões, bastaria que agrupássemos as casas decimais de n em n .

Portanto, o espaço também possui a possança \aleph_1 .

Em geral, o conjunto de pares, ternas, quadras, enfim, ênuplas ordenadas de números reais, possuem a mesma possança do contínuo. O conjunto dos subconjuntos dos números reais possuiria porém a possança \aleph_2 .

Se conseguirmos encontrar um conjunto que não possa se equivaler com o conjunto \mathcal{R} e nem tampouco com o conjunto \mathcal{N} , então ele possui uma cardinalidade superior à do contínuo, já que não foi achada nenhuma cardinalidade intermediária entre \aleph_0 e \aleph_1 .

Um caso destes é o conjunto de todos os polinômios, do tipo $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Esses polinômios são representados por curvas planas. Consideremos então o plano dessas curvas e coloquemos duas retas paralelas no plano, de acordo com o desenho.



\underline{ox} é a reta das coordenadas \underline{x} dos pontos do plano e \underline{oy} é a reta das coordenadas \underline{y} dos pontos do plano. \underline{c} é uma curva representativa de um polinômio qualquer; \underline{r} e \underline{s} são as retas paralelas que falamos. A curva \underline{c} intercepta \underline{r} em P e \underline{s} em Q. Por cada ponto de \underline{r} podemos passar uma curva representativa de um segmento. Contudo uma somente dessas curvas poderia interceptar a reta \underline{s} em qualquer ponto, o que exclui a bi-univocidade porventura existente entre os pontos de \underline{r} e as curvas representativas de polinômios. O que significa que existem mais polinômios do que números reais e que a possança do conjunto dos polinômios é a possança \aleph_2 , superior à possança \aleph_1 .

E assim por diante, podemos imaginar o conjunto potência de um conjunto cujo cardinal transfinito seja \aleph_2 e que possuiria a possança \aleph_3 . Por exemplo, o conjunto dos subconjuntos dos polinômios. O conjunto potência de um conjunto desses possuiria \aleph_4 elementos.

Como já dissemos, o conjunto dos alefs é um conjunto infinito e discreto, equivalente ao conjunto dos números naturais. Só que tem que as leis operacionais válidas para os números naturais não são válidas para o conjunto dos cardinais transfinitos, o que não impede a construção de uma álgebra dos cardinais transfinitos. As operações conhecidas de adição, multiplicação e potenciação podem ser estabelecidas por meio de leis fáceis de serem compreendidas.

Chamemos \aleph_n o cardinal transfinito correspondente ao número natural n. Seja a um número natural qualquer.

Então:

$$\aleph_n + a = \aleph_n$$

$$\aleph_n + \aleph_n = \aleph_n$$

$$\aleph_n \times a = \aleph_n$$

$$\aleph_n \times \aleph_n = \aleph_n$$

$$\aleph_n^a = \aleph_n$$

Sendo $m > n$, temos:

$$\aleph_m \pm \aleph_n = \aleph_m$$

$$\aleph_m \times \aleph_n = \aleph_m$$

No entanto,

$$a^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

$$\aleph_n^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

As leis continuarão válidas se substituirmos o número natural a por um número real x .

E assim podemos trabalhar com o infinito familiarmente, como se fosse um número qualquer. Essa é uma das grandes glórias de Cantor, que lhe valeu ferrenha perseguição pelos matemáticos chamados realistas. A consideração de outros tópicos a respeito dos números cardinais transfinitos, qual seja o estabelecimento de uma estrutura operacional para eles, pode ser feito, mas isso alongaria demasiado este trabalho, cujo objetivo, que creio ter alcançado, era apenas colocar ao alcance de um leigo a fascinante questão do infinito matemático.

Referência Bibliográfica

LIPSCHUTZ, SEYMOUR. *Teoria dos Conjuntos*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1967

COURANT, RICHARD & ROBBINS, HERBERT. *O que é a Matemática*. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2000 (referência atualizada)

MALBA TAHAN, *Grandes Maravilhas da Matemática*.